

VODNA URA

=====

UVOD

Pretok vode je navadno podan z Bernoullijevo enačbo. Ta predvideva, da je pretok sorazmeren s korenom tlačne razlike (na kratko tlaka). Če tlak ustvarimo kar z višino stolpca vode, je pretok sorazmeren s korenom višine. Izkaže pa se, da je v primeru, ko se voda pretaka skozi pesek, filter ali zelo tanko cevčico, pretok premo sorazmeren s tlakom (višino). Če se spomnimo analogije med pretokom kapljev in električnim tokom, bi lahko temu rekli Ohmov zakon za kapljevine. V literaturi se zakon imenuje Poiseuillov [izg: puazilov] zakon.

Če imamo posodo, v kateri je voda in ta iz nje izteka po Poiseuillovem zakonu, se bo s tem gladina nižala, kar pomeni, da se bo zato spreminjal pretok. Pri tej nalogi se ukvarjamo s tem, kako se spreminja višina v posodi, iz katere izteka voda, v odvisnosti od oblike posode.



Poiseuillov zakon za naš primer: $h = R \Phi$.

Φ je lahko masni ali volumnski pretok (spremeni se vrednost in enota R , a tega tako ne bomo računali). Mimogrede: kakšna je fizikalna enota za koeficient R , če gre v omenjeni enačbi za volumnski pretok?

PRIPOMOČKI:

- posode različnih oblik: ena valjasta, ena stožčasta, ena ali dve neke oblike, ki je med valjasto in stožčasto,
- filtri za vse posode,
- dva metra,
- štoparica,
- silomer in potopljiv valj, primeren za merjenje vzgona.

TEORIJA

1) Napovejte, kako se bo višina gladine spreminjala s časom za:

- a) valjasto posodo,
- b) stožčasto posodo,

Zanima nas samo, ali bo padala vse hitreje, vse počasneje ali enakomerno.

Vsaj približno skicirajte oba grafa.

* Na voljo vam je pomoč P1 spodaj.

2) Ali po vašem mnenju obstaja oblika posode, kjer bi se višina gladine spreminjala linearno s časom? (Tako posodo bi lahko uporabili kot vodno uro).

* Na voljo vam je pomoč P2.

POSKUS

3) Postavite napravo, pri kateri boste lahko merili višino gladine vode v odvisnosti od časa.

* Na voljo vam je pomoč P3.

4.1) Izmerite spreminjanje gladine s časom za valjasto posodo, $h(t)$.

4.2) Narišite graf $h(t)$.

4.3) Izmed ponujenih izberite tisto obliko grafa, za katero menite, da se najbolj približa vaši obliki. Lahko jih izberete več, če se vam jih več zdi primernih.

* Na voljo vam je pomoč P4.

5.1) Izmerite spreminjanje gladine s časom za stožčasto posodo, $h(t)$.

5.2) Narišite graf $h(t)$.

5.3) Izmed ponujenih izberite tisto obliko grafa, za katero menite, da se najbolj približa vaši obliki. Lahko jih izberete več, če se vam jih več zdi primernih.

* Na voljo vam je pomoč P4.

6.1) Izmed ostalih ponujenih posod izberite eno in zanjo izmerite odvisnost $h(t)$.

6.2) Narišite graf $h(t)$.

6.3) Določite obliko posode. Preverite, ali se ujema s katero od matematično preprostih oblik (odvisnost višine h od radija r oziroma ustrezna linearna odvisnost $y(x)$):

a) $h = k r$, linearizacija: ni potrebna (enačba je že linearna),

b) $h = k r^2$, linearizacija: $y = h$; $x = r^2$,

c) $h = k r^3$, linearizacija: $y = h$; $x = r^3$,

d) $h = k r^4$, linearizacija: $y = h$; $x = r^4$,

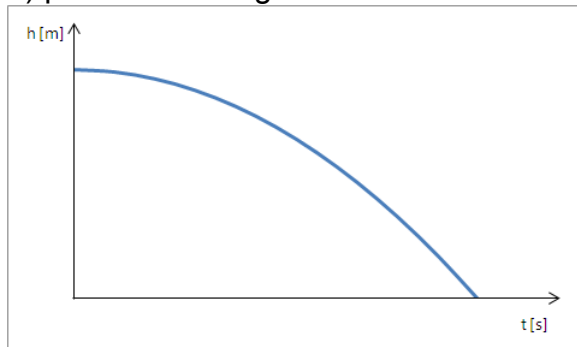
e) $h = k e^{nr}$. linearizacija: $y = \ln(h)$; $x = r$.

* Na voljo vam je pomoč P5.

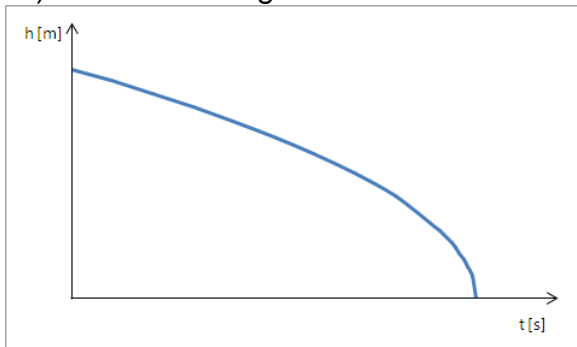
* Kaj je linearizacija? (pomoč P6)

Nabor grafov $h(t)$:

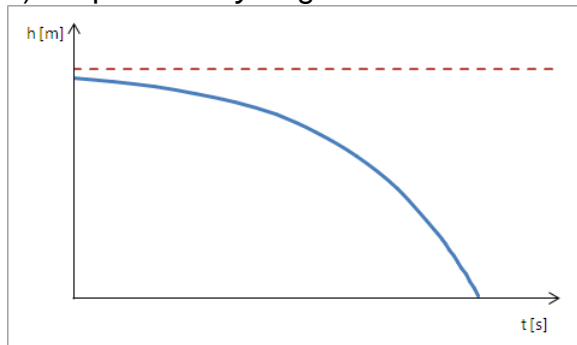
a) parabolična negativna



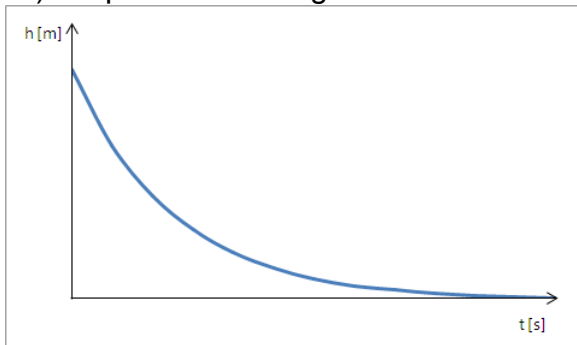
b) korenska x-negativna



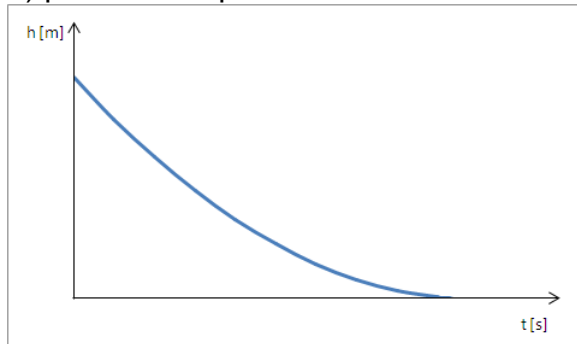
c) eksponentna y-negativna



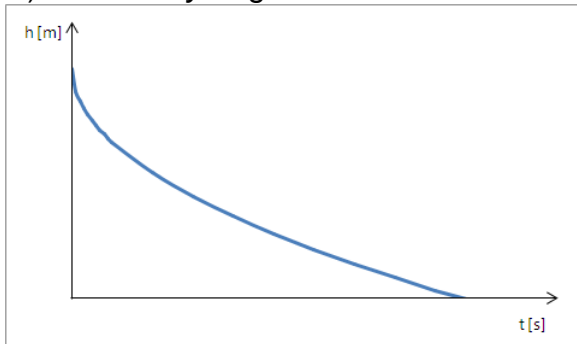
d) eksponentna x-negativna



e) parabolična pozitivna



f) korenska y-negativna



POMOČ (namigi)

P1

Privzeli smo, da velja Poiseuillov zakon in je pretok premo sorazmeren z višino gladine. Vemo torej, koliko vode odteče na sekundo, koliko se pri tem zniža gladina je pa odvisno od oblike posode. Premislite, koliko se bo gladina spremenila, če je posoda ozka in kako je če je široka.

P2

Napovedali ste graf $h(t)$ za dve obliki posode. Denimo, da imate posodo, ki lahko spreminja obliko in ji spreminjate obliko od stožčaste proti valjasti. Premislite, kakšni bi bili grafi za vmesne oblike. Ali bi lahko bi kateri linearen?

P3

Naprava mora omogočati merjenje višine gladine vode. Spomnite se, denimo, kako merijo nivo vode v rekah in jezerih. Ali bi se dalo tu tudi kaj podobnega uporabiti?

- Najlažja metoda je, da v posodo potopite meter in odčitavate z njega. Težava se pojavi, ker se včasih ne vidi dobro, do kod sega voda, ker močno omoči meter.
- Če je posoda vsaj prosojna, je ena možnost tudi, da meter pritrdite ob rob posode in odčitavate s trikotnikom ali tako, da mimo metra opazujete višino vode (pazite na paralakso).
- Ena metoda je, da merite tlak na dnu posode. Lahko z navadnim barometrom na U- cev ali s senzorjem tlaka prek računalniškega vmesnika.
- Spet ena metoda je, da uporabite natego, ki jo zvijete v U cev in ob navzgor obrnjen konec položite meter.
- Primerna metoda je tudi, da v vodo potopite na silomer pritrjen valj in odčitavate silo vzgona. Ta se spreminja, ker se spreminja prostornina potopljenega dela valja. Paziti morate, da je spodnji del valja vedno na isti točki v posodi.

P4

Premislite, kateri grafi avtomatično odpadejo, ker so drugače ukrivljeni. Med tistimi, ki ostanejo, pogledajte podrobnosti: ali je npr. smiselno, da bi začela krivulja popolnoma vodoravno/navpično? Ali je smiselno, da bi končala popolnoma vodoravno/navpično? Če ne morete nobene več izločiti, morate vse, ki so ostale, sprejeti kot mogoče modele.

P5

Spomnite se, kako ste določali oblike likov. Kaj pa teles? Kako bi npr. določili obliko balona, če bi jo bilo treba natančno narisati?

P6

Denimo, da imamo krivuljo, ki jo lahko opišete z enačbo $y = A x^3$. Linearizacija pomeni, da namesto kubične krivulje želimo premico: $y = k x + n$. Vpeljimo novo spremenljivko $x' = x^3$. Tako dobimo linearno funkcijo $y = A x'$. Namesto x torej nanašamo na vodoravno os vrednosti x' , ki jih prej izračunamo iz x . Lahko pa linearizacijo izvedemo tudi v obratni smeri, tako da vpeljemo y' . Izrazimo x in dobimo $x = (1/A y)^{1/3} = 1/A^{1/3} y^{1/3}$ (opomba: $a^{1/3}$ pomeni tretji koren iz a). Vpeljimo $y' = y^{1/3}$ in dobimo $y' = A^{1/3} x$. Spet je to linearna funkcija. V bistvu smo prišli do enake linearizacije, le zapis je nekoliko drugačen.

Značilen zgled je linearizacija eksponentne funkcije $y = A e^{-Bx}$. Vpeljimo $y' = \ln y$, pa dobimo: $y' = -Bx + \ln A$.